



سبقت (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

نام آزمون: آزمون فصل ۵ شاکریان - ترکیب تابع و

انواع تابع  
خرید محصولات: ۰۹۰۱۴۲۵۳۰۵۰

فیلم آموزشی: shakeryan.com

۱) حاصل عبارت  $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{80}$  کدام است؟

- ۱) -۴      ۲) -۳      ۳)  $-1 - 2\sqrt{5}$       ۴)  $3 - 2\sqrt{5}$

۲) رابطه‌ی  $\{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، یک تابع است؟

- ۱) -۲      ۲) -۱      ۳) ۲      ۴) هیچ مقدار  $m$

۳) تابع  $f = \{(-1, m+3n), (0, 2-3n), (-3, 2n+1)\}$  یک تابع ثابت است. مقدار  $f(-1)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{5}$       ۲)  $\frac{3}{5}$       ۳)  $\frac{8}{5}$       ۴)  $\frac{7}{5}$

۴) اگر  $f(g(x)) = 9x^2 - 12x + 10$  و  $f(x) = 3x - 2$  باشد، حاصل  $g(6)$  کدام است؟

- ۱) ۸۸      ۲) ۹۲      ۳) ۸۴      ۴) ۸۶

۵) اگر  $f(x) = x^2 - x - 1$  و  $g(x) = x^2 + x$  باشد، مجموع جواب‌های معادله  $(g \circ f)(x) = 0$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳)  $\sqrt{5} + 2$       ۴)  $\sqrt{5} - 2$

۶) اگر  $f(x) = 3x - 2$  و  $g(f(x)) = x^2 - 2x - 3$  باشد، حاصل  $(f \circ g)(4)$  کدام است؟

- ۱) -۵      ۲) ۱۰      ۳) ۷      ۴) -۱۱

۷) اگر  $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه‌ی  $f(x)$  برابر کدام است؟

- ۱)  $x^2 - x + 3$       ۲)  $x^2 - 2x - 1$       ۳)  $x^2 - 2x + 1$       ۴)  $x^2 - x + 1$

۸) تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{(a+1)x^2 - bx + c + 1}{cx + 2}$  یک تابع همانی است. مجموع ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  کدام است؟

- ۱) -۴      ۲) -۵      ۳) -۳      ۴) -۶



۹ حاصل عبارت  $(2 - \sqrt{3})^{-1} + \frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}}$ ، کدام است؟

۱ (۴)

۳ (۳)  $1 + \sqrt{3}$ ۲ (۲)  $2\sqrt{3}$ ۱ (۱)  $1 + 2\sqrt{3}$ 

۱۰ اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 3 - 2x & x < 1 \end{cases}$  حاصل  $f^2(-f(2))$  کدام است؟

۱۶۴ (۴)

۱۲۱ (۳)

۱۴۴ (۲)

۸۱ (۱)



## پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{3^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{3^3} = 2 \times 3 = 6$$

مخرج کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{(2 - \sqrt{5})^2}{2^2 - 5} = \frac{4 + 5 - 4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5} - 9$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{4^2 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{پس داریم: } = 6 + 4\sqrt{5} - 9 - 4\sqrt{5} = 6 - 9 = -3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ برای این که رابطه‌ای نشان‌دهنده تابع باشد هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید دارای مولفه اول برابر داشته باشد.

$$(3, m^2), (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$m = -1 \Rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \rightarrow$  تابع است

$m = 2 \Rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\} \rightarrow$  تابع نیست

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ ثابت بودن تابع  $f$  یعنی تمام  $x$ ها،  $y$ های یکسانی دارند. از این رو باید تمام  $y$ های اعضای  $f$  را برابر هم قرار دهیم:

$$m + 3n = 2 - 3n = 2n + 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - 3n = 2n + 1 \rightarrow 5n = 1 \rightarrow n = \frac{1}{5} \\ m + 3n = 2n + 1 \rightarrow m = -n + 1 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-1, m+3n) \in f} f(-1) = m + 3n = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ با توجه به ضابطه تابع  $f(x)$  داریم:

$$f(x) = 3x - 2 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 2$$

$$\text{بنابراین: } 3g(x) - 2 = 9x^2 - 12x + 10 \rightarrow 3g(x) = 9x^2 - 12x + 12$$

$$\rightarrow g(x) = 3x^2 - 4x + 4 \rightarrow g(6) = 3 \times 36 - 4 \times 6 + 4 = 108 - 24 + 4 \rightarrow g(6) = 88$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ابتدا توجه کنید که:

$$(g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow f^2(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x)(f(x) + 1) = 0$$

پس باید مجموع جواب‌های معادله‌های  $f(x) = 0$  و  $f(x) = -1$  را حساب کنیم.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = -1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = 1$$

بنابراین  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  و  $x_4$  جواب‌های معادله  $(g \circ f)(x) = 0$  هستند که مجموع آنها برابر ۲ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ با توجه به فرض مسأله داریم:

$$g(f(x)) = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{f(x)=3x-2} g(3x-2) = x^2 - 2x - 3$$

حالا به محاسبه  $(f \circ g)(4)$  می‌پردازیم:

$$(f \circ g)(4) = f(g(4))$$



ابتدا باید  $g(4)$  را محاسبه کرد. برای به دست آوردن حاصل  $g(4)$ ، با توجه به اینکه  $g(3x-2) = x^2 - 2x - 3$  است، داریم:

$$3x - 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow g(3(2) - 2) = 2^2 - 2 \times 2 - 3$$

$$\rightarrow g(4) = -3 \rightarrow f(g(4)) = f(-3) = 3(-3) - 2 = -11$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند  $x = 2$  را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای  $x$  آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

تابع همانی که هر  $x$  را به  $x$  (همان) خود نسبت می‌دهد ضابطه‌ای به صورت  $f(x) = x$  دارد. یعنی باید تابع داده شده را

برابر  $f(x) = x$  قرار داده و از مقایسه طرفین ضرایب را به دست آوریم:

$$\frac{(a+1)x^2 - bx + c + 1}{cx + 2} = x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (a+1)x^2 - bx + c + 1 = cx^2 + 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1 = c \xrightarrow{c=-1} a = -2 \\ -b = 2 \rightarrow b = -2 \\ c+1 = 0 \rightarrow c = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} a+b+c = -2-2-1 = -5$$

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \frac{13(\sqrt{3}-1)}{13} = \sqrt{3}-1$$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1+2+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$f(2) = 2x = 2 \times 2 = 4 \rightarrow f^2(-f(2)) = f^2(-4)$$

$$f(-4) = 3 - 2(-4) = 11 \rightarrow f^2(-4) = (11)^2 = 121$$

## پاسخنامه کلیدی

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|----|---|---|---|---|